Einführung

Als Transformationen werden die

- Streckung/Stauchung
- Verschiebung
- Spiegelung

einer Funktion bezeichnet

Die Transformationen werden erreicht durch Anpassungen der Eigenschaften der Funktion. Diese seien hier am Beispiel einer exponentiellen Funktion mit

$$f(x) = a \cdot b^{x-c} + d$$

und einer e-Funktion mit

$$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x - c} + d$$

erläutert. Die Parameter stehen für folgende Eigenschaften:

a : Streckung/Stauchung in y-Richtung

b/k : Streckung/Stauchung in x-Richtung

c : Verschiebung in x-Richtung

d : Verschiebung in y-Richtung

Spiegelungen werden erreicht durch einen Vorzeichenwechsel von a und k.

Ferner gilt der Zusammenhang: $k = ln(b)$ sowie $b = e^k$

1. Aufgabe (Abi 2023 - Analysis 1 (Teilaufgabe 1.6))[1]

Die Abbildung zeigt schematisch die achsensymmmetrische Seitenansicht einer Hängebrücke. Die beiden vertikalen Pfeiler haben einen Abstand von 400 m. Die Wasseroberfläche liegt 20 m unterhalb der Fahrbahn.

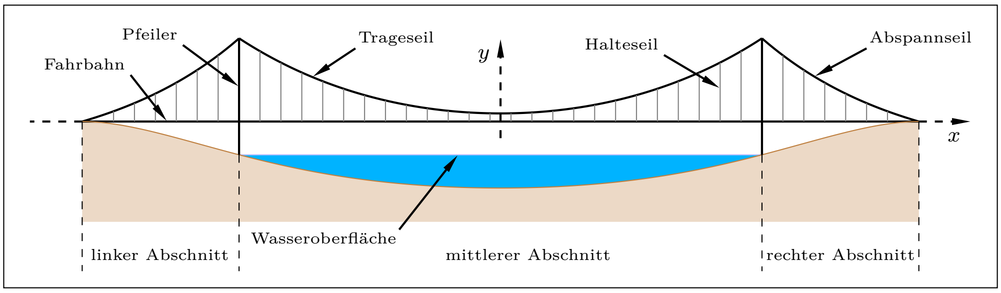


Abbildung: Seitenansicht der Hängebrücke

Die beiden Pfeiler gliedern die Brücke in einen linken, einen mittleren und einen rechten Abschnitt. Am oberen Ende jedes Pfeilers ist sowohl das Tragseil des mittleren Abschnitts als auch das Abspannseil des linken bzw. rechten Abschnitts befestigt.

Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 10 m in der Realität. In der Seitenansicht der Brücke verläuft die x-Achse entlang der horizontal verlaufenden Fahrbahn, die y-Achse entlang der Symmetrieachse.

Im rechten Abschnitt der Brücke wird der Verlauf des Abspannseils modellhaft durch den folgenden Funktionsterm beschrieben:

$$r(x) = \frac{253}{100} \cdot \left(e^{\frac{1}{11}(32-x)} - 1\right)$$

(6) Auch im linken Abschnitt der Brücke kann der Verlauf des Abspannseils im Modell durch einen Funktionsterm beschrieben werden. Geben Sie einen passenden Term $l(x)$ sowie das Intervall an, in dem dieser Term das Abspannseil darstellt.

2. Aufgabe (Abi 2021 - Analysis 2 (Teilaufgabe 3))[2]

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(t) = a \cdot (t^3 - 4 \cdot t)$$

und $a > 0$

Die Abbildung 2 zeigt den. Graphen von f_1.

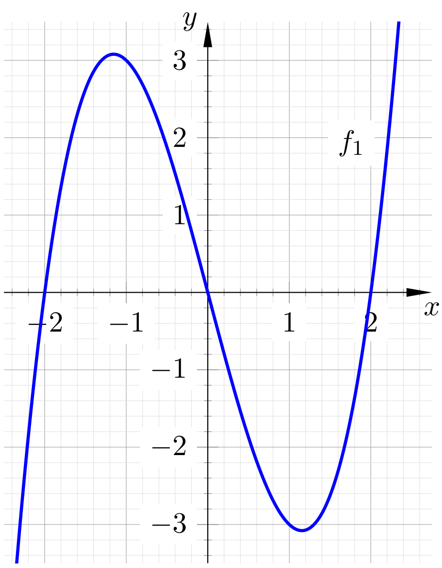


Abbildung 2

(1) Für jedes $a > 0$ hat der Graph von f_a genau einen Hochpunkt H_a. Beschreiben Sie, wie sich die Lage von H_a ändert, wenn sich der Wert des Parameters a verdreifacht.

(2) Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(2|0)$ schließt mit der t-Achse einen Winkel ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert für a , für $t$den dieser Winkel $45°$ beträgt.

(3) Weisen Sie durch Rechnung nach:
Verschiebt man den Graphen von g aus Abbildung 1 nach links entlang der t-Achse um 2 Einheiten und anschließend entlang der y-Achse nach unten um 96 Einheiten, so erhält man einen Graphen, der zur Schar f_a gehört.

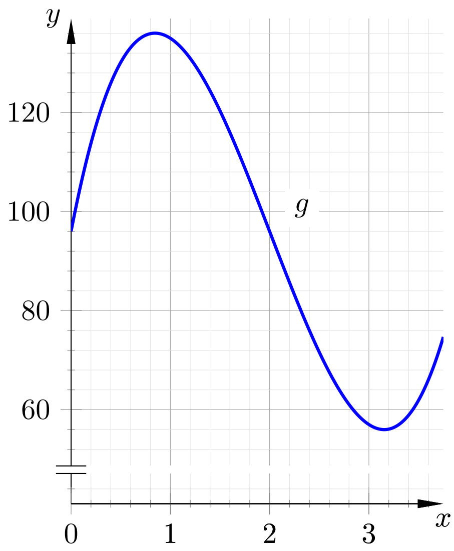
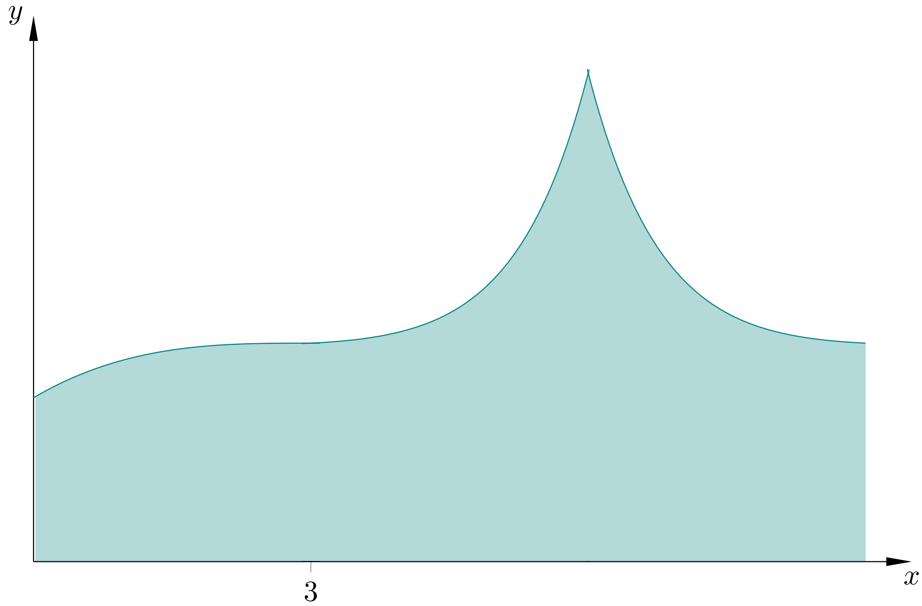


Abbildung 1

3. Aufgabe $\big($Abi 2021 - Analysis 1 (Teilaufgabe 2.4)$\big)$[3]

Im Jahr 2019 zerstörte ein Großbrand das Dach der Kathedrale Notre-Dame de Paris. Eine der vielen Ideen für den geplanten Wiederaufbau sieht die Errichtung eines Glasdaches mit einem gläsernen Turm darauf vor.



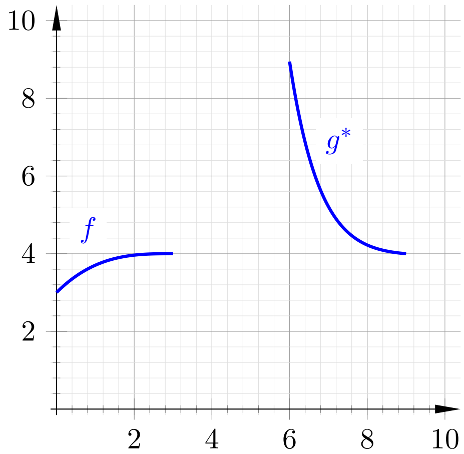
In einem geeigneten Koordinatensystem wird der Dachfirst mit Hilfe von Funktionsgraphen modelliert. Die Funktionswerte geben die Höhe des Dachfirsts über dem Boden an; Die x-Achse beschreibt das Bodenniveau. Dabei entspricht eine Längeneinheit 10 m in der Wirklichkeit.

Nun wird eine Funktion g mit

$$g(x) \;=\; (x-3)e^{x-5,5}+4$$

betrachtet. Mit Hilfe des Graphen von g wird über dem Intervall $[3;6]$ ein Teilstück des Dachfirsts modelliert.

(4) Der Graph der Funktion g wird an der y-Achse gespiegelt und dann um zwölf Längeneinheiten nach rechts verschoben. Dadurch ergibt sich der Graph der Funktion g^*, der über dem Intervall $[6;9]$ in der Abbildung gezeigt wird.



Ermitteln Sie einen Funktionsterm $g^*(x)$, und stellen Sie diesen Term in der Form

$$(ax+b)\cdot e^{-x+c}+4$$

mit geeigneten reellen Werten a, b und c dar.

4. Aufgabe (Abi 2020 - Analysis 2 (Teilaufgabe 2))[4]

Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab. Der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 wird im Folgenden durch die Funktion p mit

$$p(x) \;=\; 200\cdot e^{-0{,}048x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

(1) Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an. Berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt.

(2) Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird.

5. Aufgabe $\big($Abi 2020 - Analysis 2 (Teilaufgabe 4)$\big)$[5]

Beim Zerfall von Plutonium-241 entsteht neben einem radioaktiver Stoff h_k mit

$$h_k(x) = 10 \cdot \left(1 - e^{-kx}\right) \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

ein weiterer radioaktiver Stoff Americium-241. Die Funktion a mit

$$a(x) = 207 \cdot (1 - e^{-0{,}0464x}) \cdot e^{-0{,}0016x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

gibt für jedes Jahr x die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

(1) Der Graph von a kann für einen Wert von k aus dem Graphen der Funktion h_k erzeugt werden, indem man diesen in x-Richtung und in y-Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von k.

(2) Im Funktionsterm von a beschreibt der Faktor $1 - e^{-0{,}0464x}$ die Zunahme der Masse des vorhandenen Americium-241 und der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ den Zerfall des vorhandenen Americium-241. Begründen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem beide Faktoren den gleichen Wert annehmen, ohne diesen Zeitpunkt zu berechnen.

Übersicht der Abituraufgaben

[1]Lösung zu: Analysis 1, Teilaufgabe 1 (Modell der Brücke, Unteraufgabe 6), Abitur 2023, Schleswig-Holstein.
[2]Lösung zu: Analysis 2, Teilaufgabe 3 (Funktionschar f), Abitur 2021, Schleswig-Holstein
[3]Lösung zu: Analysis 1, Teilaufgabe 2 (Funktion g, Unteraufgabe 4), Abitur 2021, Schleswig-Holstein
[4]Lösung zu: Analysis 2, Teilaufgabe 2 (Funktion p), Abitur 2020, Schleswig-Holstein
[5]Lösung zu: Analysis 2, Teilaufgabe 4 (Funktion a), Abitur 2020, Schleswig-Holstein