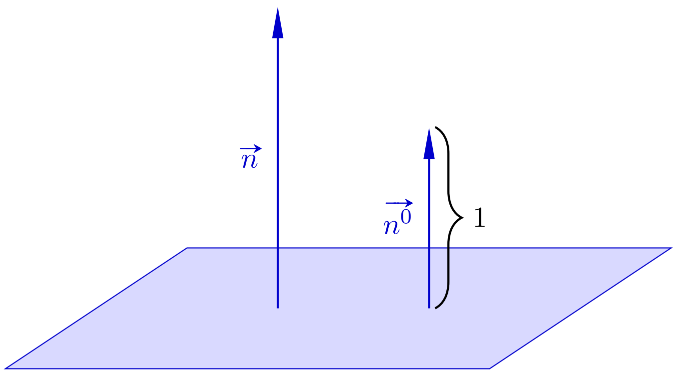
Hesse'sche Normalenform

Nachhilfe-Studio Möller

Einleitung

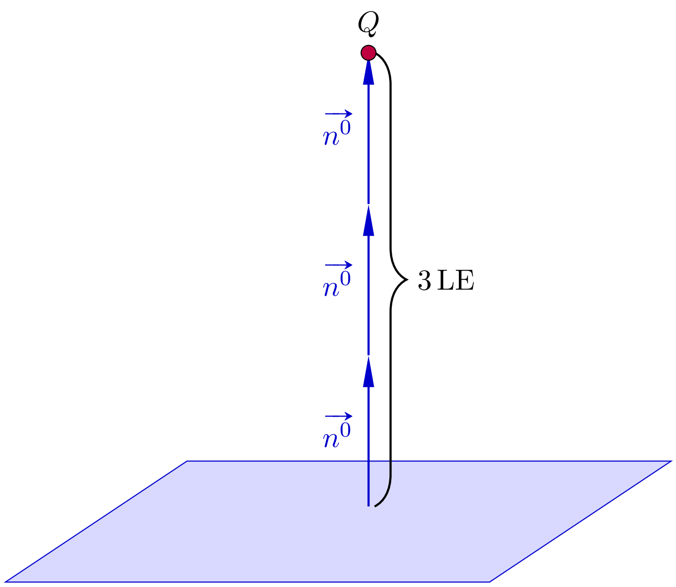
Um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu berechnen, wird die Hesse'sche Normalenform verwendet. Die Hesse'sche Normalenform basiert darauf, dass der Normalenvektor der Ebene normiert wird. So sind dann vergleichbare Abstandswerte möglich. Umgesetzt wird dies mit dem. Einheitsvektor des Normalenvektors. Dieser Einheitsvektor wird notiert als $\vec{n_0}$



und berechnet mit

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}.$$

Der Abstand eines Punktes Q zu eines Ebene E entspricht dann dem Vielfachen (oder Bruchteil) des Vektors $\vec{n_0}$.



Die Berechnung des Abstands eines Punktes Q zu eines Ebene E erfolgt in der Normalenform mit der Formel

$$Abst(Q;E) \;=\; \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left|(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n}\right|,$$

wobei Q für X eingesetzt wird. Das Ganze geht auch in der Koordinatenform mit der Formel

$$Abst(Q;E) \;=\; \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d|$$

Häufig sieht man auch die Schreibweise, in der der Betrag von $\vec{n}$ bereits aufgelöst ist. Dann ergibt sich die Formel

$$Abst(Q;E) \;=\; \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1. Aufgabe (Abi 2023 - HMF 6 (Pool 1))[1]

Gegeben sind der Punkt $A(2|0|0)$ und die Ebene

$$E:\; x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

(1) Zeigen Sie, dass der Punkt A den Abstand 3 von der Ebene hat.

(2) Geben Sie zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an, so dass

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

eine Gleichung der Ebene E in Parameterform ist.

2. Aufgabe (Abi 2023 - Analytische Geometrie (Teilaufgabe 1.4))[2]

(4) Berechnen Sie den Abstand des Ursprungs zur Ebene L mit

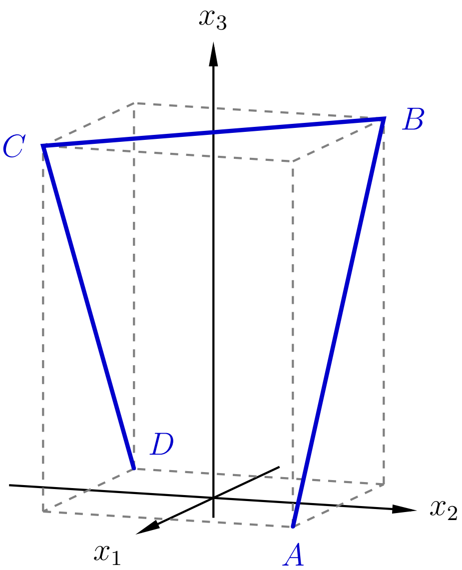
$$L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0.$$

3. Aufgabe (Abi 2022 - Analytische Geometrie (Teilaufgaben 2.1+2.2))[3]

Im Koordinatensystem ist der Streckenzug abgebildet, der aus den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ besteht mit

$A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$,
$C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$.

Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders, der gestrichelt dargestellt ist.



Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C.

(1) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

[Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$]

(2) Der Abstand des Punktes D von der Ebene E wird mit d bezeichnet.

- Berechnen Sie den Wert von d.
- Begründen Sie, dass der Term

  $\frac{d}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

  das Volumen der Pyramide $ABCD$ angibt.

Übersicht der Abituraufgaben

---

[1] Lösung zu: HMF 6, Abitur 2023, Schleswig-Holstein.

[2] Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 1 (Ebene L, Unteraufgabe 1), Abitur 2023, Schleswig-Holstein.

[3] Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 2 (Ebene E, Unteraufgaben 1+2), Abitur 2022, Schleswig-Holstein.