Lotfußpunkt

Einführung

Das Lotfußpunktverfahren wird verwendet, um den Abstand eines Punktes von einer Geraden oder um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu berechnen.

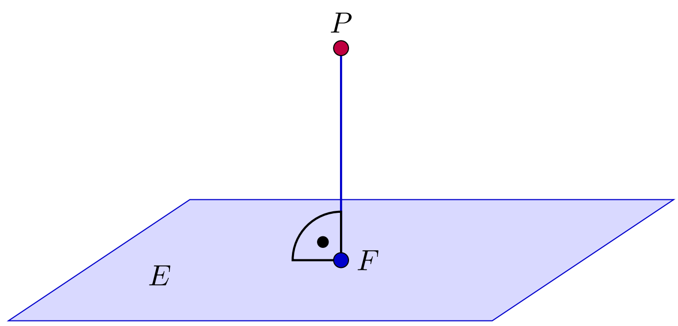
Für den letzteren Fall wird in der Regel die Abstandsberechnung mit der Hesse'schen Normalenform vorgezogen, da dieses weniger aufwändig ist.

Das Lotfußpunktverfahren ist aber trotzdem möglich.

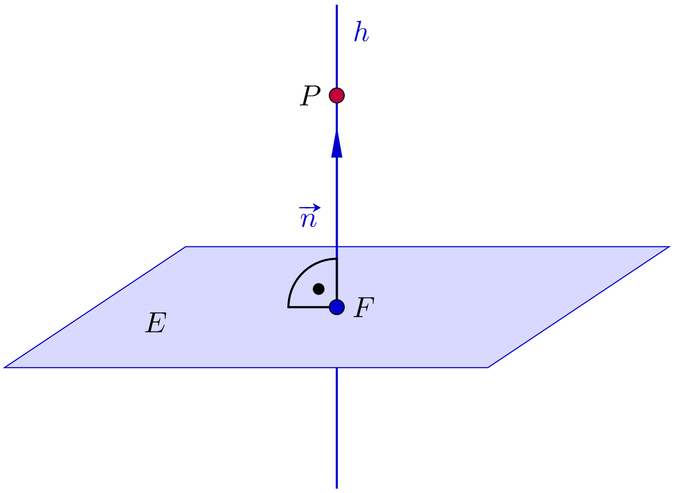
Geht es bei dem Fall Punkt-Ebene darum, nur den Lotfußpunkt zu ermitteln, so muss das Lotfußpunktverfahren verwendet werden. Denn die Hesse'sche Normalenform berechnet nur den Abstand.

Lotfußpunkt

Betrachten wir zunächst den Fall Abstand Punkt zu Ebene. Von dem Punkt P wird das Lot orthogonal auf die Ebene gefällt. Den Punkt F nennt man den Fußpunkt des Lotes auf die Ebene E . Der Abstand zwischen P und F bildet den minimalen Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E.



Um den Lotfußpunkt F zu berechnen, stellen wir eine Hilfsgerade h mit dem Punkt P und dem Normalenvektor der Ebene auf. Der Schnittpunkt zwischen der Geraden und der Ebene ist der gesuchte Punkt F.

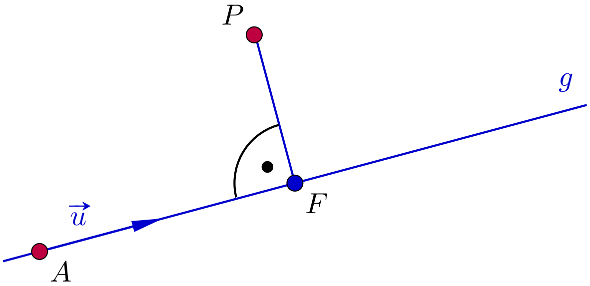


Abstand Punkt-Gerade

Um den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g mit

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$$

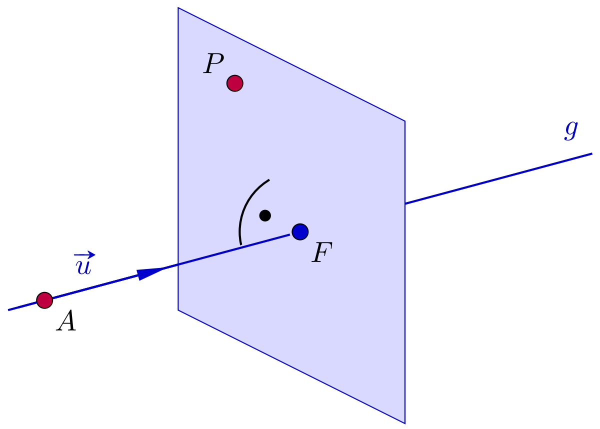
zu berechnen,



muss die orthogonal zur Geraden verlaufende Verbindung von P nach F ermittelt werden. Dafür sind 2 Methoden üblich:

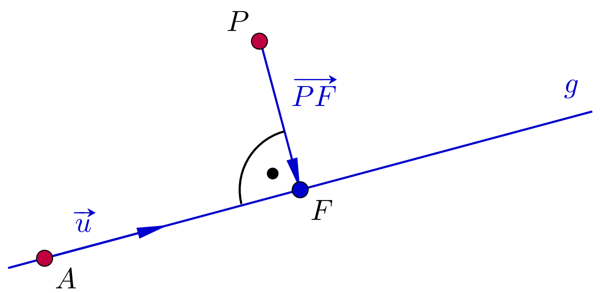
(1) *Lotfußpunktverfahren mit einer Hilfsebene*

Es wird eine Ebene benötigt, die den Vektor $\overrightarrow{PF}$ enthält. Am einfachsten geht dies, wenn man die Ebene nimmt, die orthogonal zur Geraden g liegt und den Punkt P enthält. Der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden ist dann gleichzeitig der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene.



Der Schnittpunkt der Geraden und dieser Ebene ergibt den Fußpunkt F, so dass die Strecke $|PF|$ ermittelt werden kann.

(2) *Lotfußpunktverfahren mit der Orthogonalitätsbedingung*



Der Punkt F kann mit der Geraden

$$g:\ \vec{x} \;=\; \vec{a} + t\cdot\vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

als die Punkteschar

$$F\big(a_1 + t\cdot u_1 \,|\, a_2 + t\cdot u_2 \,|\, a_3 + t\cdot u_3\big)$$

beschrieben werden. Mit der Orthogonalität von $\overrightarrow{PF}$ und $\vec{u}$ mit

$$\overrightarrow{PF} \circ \vec{u} \;=\; 0$$

können die genauen Koordinaten von F berechnet werden. Anschließend kann der Abstand $|PF|$ ermittelt werden.

Vollständig durchgerechnete Beispiele zu den hier behandelten Themen sind in meinem Blog-Artikel

Lotfußpunktverfahren

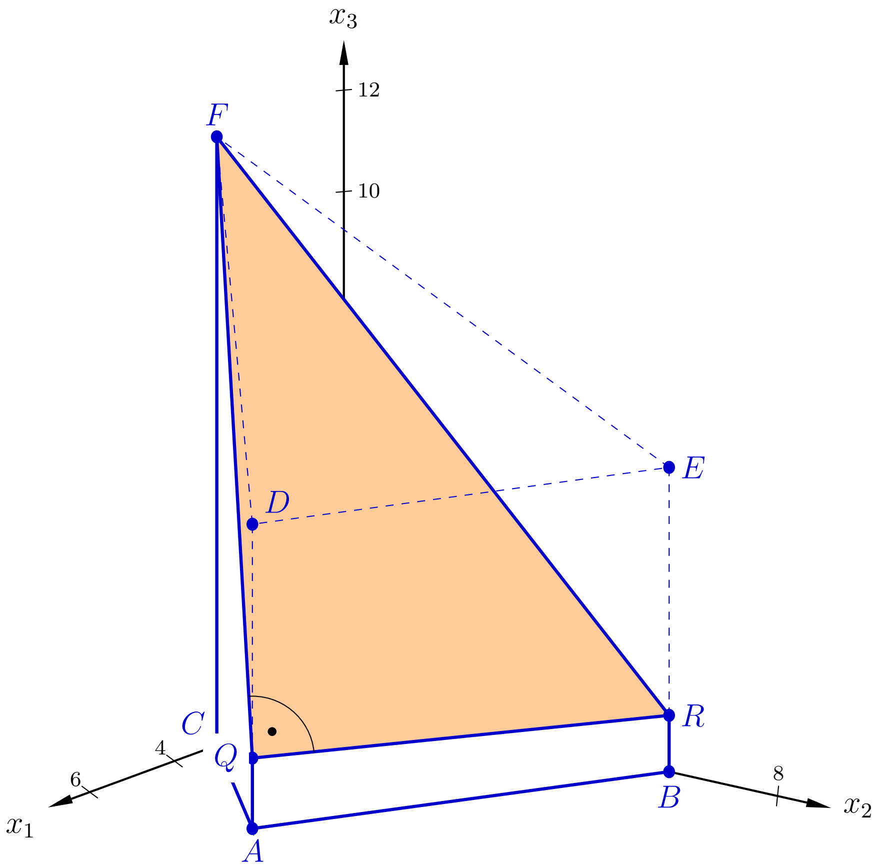
zu finden.

1. Aufgabe (Abi 2023 - Analytische Geometrie (Teilaufgabe 2.4))[1]

Die Abbildung zeigt den Körper $ABCDEF$ mit

$A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

Der Körper wird eben beschnitten, so dass als Schnittfläche das Dreieck FQR erscheint.



(4) Auf der Kante $\overline{AD}$ liegt der Punkt Q, auf der Kante $\overline{BE}$ der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q.

2. Aufgabe (Abi 2021 - HMF 6 (Pool 1))

Gegeben ist die Ebene E mit

$E: \; 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

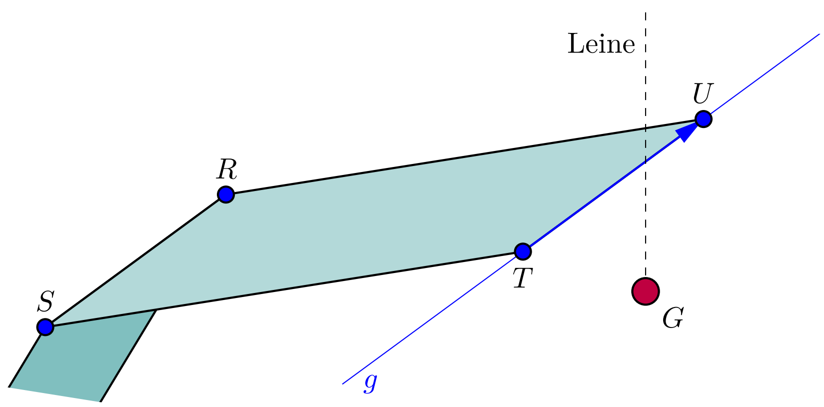
(1) Geben Sie diejenige Zahl a an, für die der Punkt $A(a|0|-1)$ in der Ebene E liegt.

(2) Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die senkrecht auf E steht und durch den Punkt $B(1|3|4)$ verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

3. Aufgabe (Abi 2021 - Analytische Geometrie (Teilaufgaben 2))[2]

In der Nähe der Kante $\overline{TU}$ hängt bei $G(3|3{,}5|4{,}5)$ eine Glocke, die mit einer Leine am Hallendach befestigt ist. Zum Abschluss seiner Trainingseinheit läutet der Kletterer diese Glocke mit einer Hand, während er sich mit der anderen Hand an demjenigen Punkt K auf der Kante $\overline{TU}$ festhält, der den geringsten Abstand zu G hat. Durch T und U verläuft die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OT} + r \cdot \overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



(1) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von G auf g.

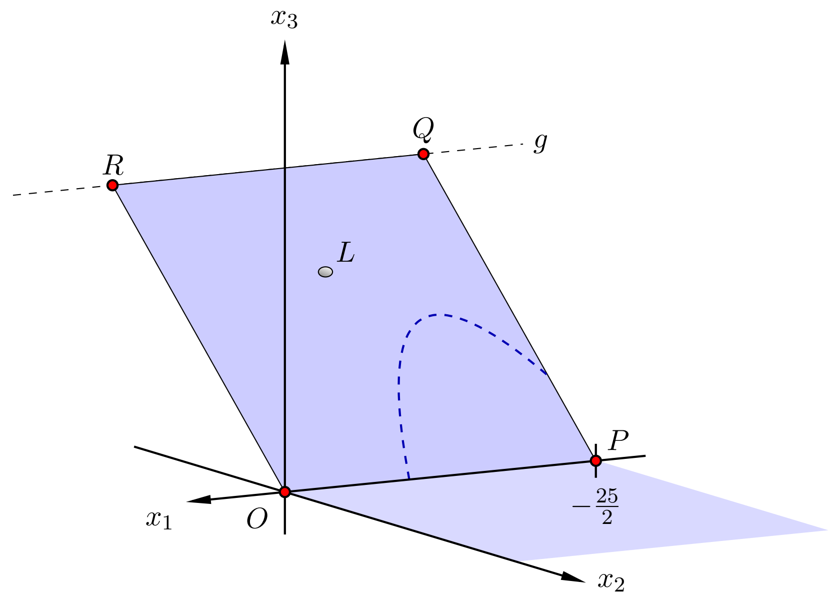
[Kontrolle: $F(2{,}25|2{,}75|4{,}5)$]

(2) Begründen Sie, dass K und F nicht identisch sind.

(3) Künftig soll die Glocke an einem anderen Punkt G^* platziert werden. Der Punkt G^* befindet sich in einer Höhe von $4{,}5\,m$ und ist gleich weit von T und U entfernt; sein Abstand vom Mittelpunkt M der Kante $\overline{TU}$ beträgt $35\,cm$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M und die Koordinaten eines Punktes G^* mit den beschriebenen Eigenschaften.

4. Aufgabe (Abi 2020 - Analytische Geometrie (Teilaufgaben 2.3, 2.4))[3]

In der Abbildung ist neben L und g das Viereck $OPQR$ dargestellt, dessen Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P\left(-\frac{25}{2}|0|0\right)$, $Q\left(-\frac{25}{2}|-12|9\right)$ und $R(0|-12|9)$ in E liegen. Q und R liegen außerdem auf g.



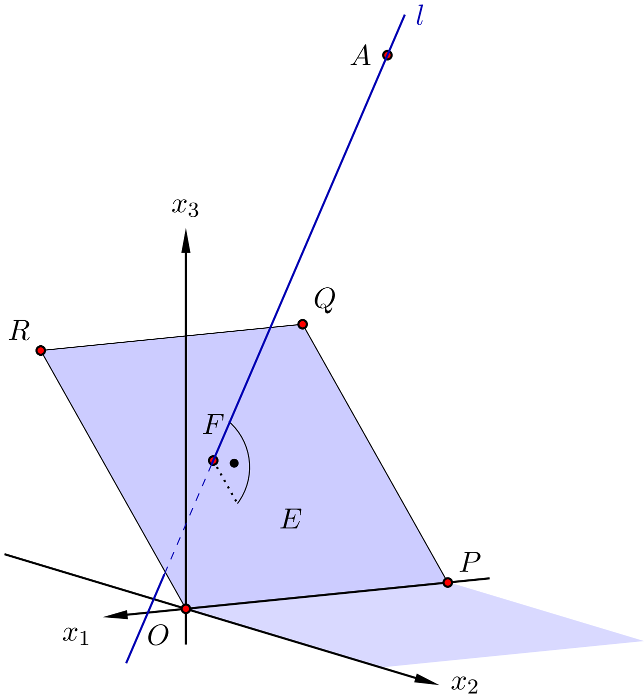
(3) Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte P und R verläuft.

(4) O' ist der Punkt der Ebene E , der durch Spiegelung des Punktes O an der Geraden h entsteht. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes O' ermitteln kann.

5. Aufgabe (Abi 2020 - Analytische Geometrie (Teilaufgabe 3.2))[4]

Das Viereck $OPQR$ stellt modellhaft den geneigten Teil einer Minigolfbahn dar, der Punkt L das Loch dieser Bahn. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund, eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Realität.

Im Punkt $(A(-5|8|24)$ befindet sich eine Lichtquelle.



(2) Berechnen Sie den Punkt F der Ebene E mit

$$3x_2 + 4x_3 = 0\,,$$

der den kürzesten Abstand zur Beleuchtung A aufweist.

[Zur Kontrolle: $F(-5|-6{,}4|4{,}8)$]

6. Aufgabe (Abi 2017 - HMF 5 (Pool 2))

Gegeben ist die Ebene

$$E:\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 18$$

(1) Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

(2) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

Übersicht der Abituraufgaben

[1] Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 2 (Flächen und Volumen, Unteraufgabe 4), Abitur 2023, Schleswig-Holstein.

[2] Lösung zu: HMF 6, Abitur 2021, Schleswig-Holstein.

[3] Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 2 (Glocke), Abitur 2021, Schleswig-Holstein.

[4] Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 2 (Abbildung, Unteraufgaben 3+4), Abitur 2020, Schleswig-Holstein.

[5] Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 3 (Abbildung, Unteraufgabe 2), Abitur 2020, Schleswig-Holstein.