Winkel

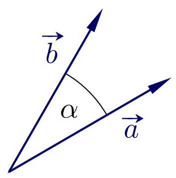
Nachhilfe-Studio Möller

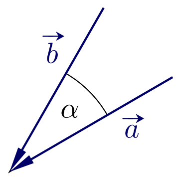
Einleitung

Der Winkel zwischen 2 Vektoren kann mit der Gleichung

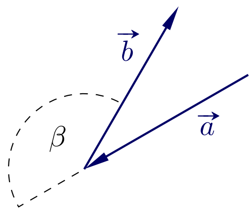
$$cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

berechnet werden. Das gilt sowohl dafür, dass die beiden Vektoren vom Scheitelpunkt des Winkels weg zeigen als auch dafür, dass beide Vektoren zum Scheitelpunkt hin zeigen.





Zeigen die Vektoren jedoch in verschiedene Richtung, also einmal hin und einmal weg, so wird nicht der Scheitelwinkel α , sondern der Nebenwinkel β berechnet.



Dies kann behoben werden, indem um das Skalarprodukt ein Betrag gesetzt wird. So wird in jedem Fall α berechnet.

$$cos(\alpha) = \frac{|\vec{a} \circ \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Gerade - Gerade

Der Winkel zwischen 2 Geraden

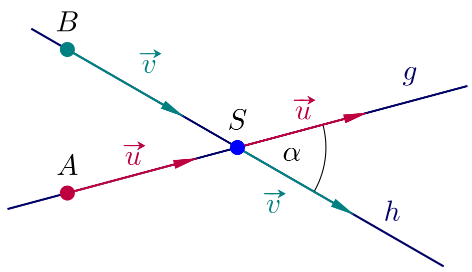
g und h mit

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$$

und

$$h : \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$$

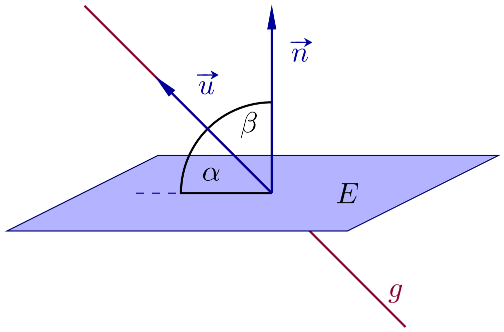
kann berechnet werden, indem die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an den Schnittpunkt S verschoben werden.



$$\boxed{cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$$

Gerade - Ebene

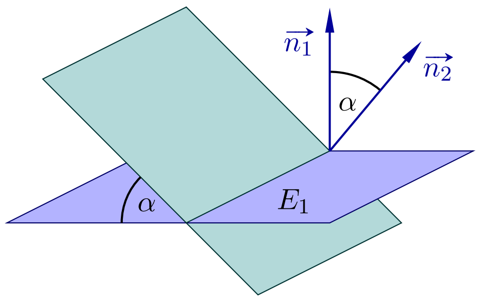
Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene wird mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g berechnet. Mit dem Kosinus würde man den Winkel β erhalten. Mit dem Sinus erhält man den gesuchten Winkel α.



$$sin(\alpha) = \frac{\left|\vec{n} \circ \vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|}$$

Ebene - Ebene

Der Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2 zeigt sich auch zwischen den beiden Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$, die jeweils um 90° gedreht zu den Ebenen liegen. Die Berechnung erfolgt mit den Normalenvektoren.



$$cos(\alpha) = \frac{\left|\vec{n_1} \circ \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}$$

1. Aufgabe (Abi 2023 - Analytische Geometrie (Teilaufgabe 1.3))[1]

(3) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit

$$L : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$$

mit der x_1x_2-Ebene einschließt.

2. Aufgabe (Abi 2022 - Analytische Geometrie (Teilaufgabe 2.3))[2]

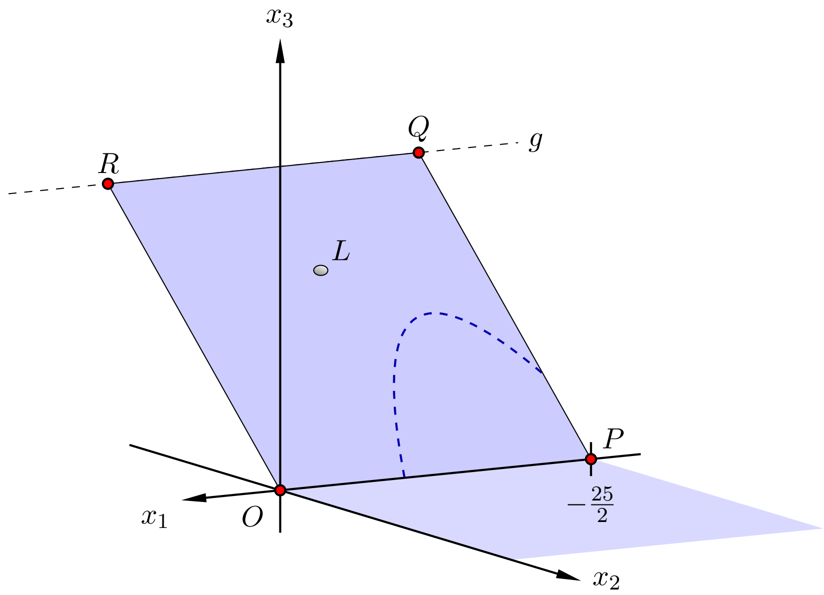
Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, unter dem

$E\;\; 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$

die x_1x_2-Ebene schneidet.

3. Aufgabe (Abi 2020 - Analytische Geometrie (Teilaufgabe 3.1))[3]

Das Viereck $OPQR$ stellt modellhaft den geneigten Teil einer Minigolfbahn dar, der Punkt L das Loch dieser Bahn. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund, eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Realität.



(1) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der geneigte Teil der Bahn mit dem Untergrund einschließt.

Übersicht der Abituraufgaben

[1]Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 1 (Ebene L, Unteraufgabe 3), Abitur 2023, Schleswig-Holstein.
[2]Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 2 (Ebene E, Unteraufgabe 3), Abitur 2022, Schleswig-Holstein.
[3]Lösung zu: Analytische Geometrie, Teilaufgabe 3 (Minigolfbahn, Unteraufgabe 1), Abitur 2019, Schleswig-

Holstein.